Olympiadepuzzel

Euclides 95 nummer 6

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Snoepjes uitdelen

Opgave

Een wiskundeleraar heeft een grote zak met 300 snoepjes. Hij wil snoepjes uitdelen aan zijn leerlingen, onder de volgende voorwaarden:

- elke leerling krijgt minstens 1 snoepje en hoogstens 50;
- er zijn geen twee leerlingen die evenveel snoepjes krijgen;
- er zijn geen twee leerlingen die samen een tienvoud aan snoepjes krijgen.

Aan maximaal hoeveel leerlingen kan hij snoepjes uitdelen?

Uitwerking

De leraar kan aan in ieder geval 18 leerlingen snoepjes uitdelen, namelijk de aantallen:

- 1, 2, 3, 4, 5 (samen 15 snoepjes voor 5 personen)
- 10, 11, 12, 13, 14 (samen 60 snoepjes voor 5 personen)
- 21, 22, 23, 24 (samen 90 snoepjes voor 4 personen)
- 31, 32, 33, 34 (samen 130 snoepjes voor 4 personen)

Dat zijn $15 + 60 + 90 + 130 = 295$ snoepjes in totaal voor $5 + 5 + 4 + 4 = 18$ leerlingen, die voldoen aan de genoemde voorwaarden.

We laten nu zien dat het onmogelijk is om aan meer dan 18 leerlingen snoepjes uit te delen.

Uit de eerste en de tweede voorwaarde volgt dat het sowieso om hooguit 50 leerlingen kan gaan die elk een ander aantal snoepjes krijgen, waarbij de aantallen variëren van 1 tot en met 50. Maar er zijn wegens de derde voorwaarde heel wat aantallen die elkaar uitsluiten. Hoeveel getallen kunnen we maximaal uit de getallen 1 tot en met 50 kiezen zodat geen twee ervan optellen tot een tienvoud?

Hiervoor kijken we naar het eindcijfer van deze getallen 1 tot en met 50. Er kan hooguit één getal zijn gekozen dat op een 5 eindigt, want twee van zulke getallen zijn bij elkaar opgeteld een tienvoud. En mochten we inderdaad een getal eindigend op een 5 hebben gekozen en dat is groter dan 5, dan kunnen we net zo goed het getal 5 kiezen, want dat kost ons minder snoepjes. We mogen er dus vanuit gaan dat als we een getal hebben gekozen dat eindigt op een 5, dit het getal 5 is.

Net zo kan er maar hooguit één getal zijn gekozen dat op een 0 eindigt, waarbij we ervan uit mogen gaan dat als we een getal hebben gekozen dat eindigt op een 0, dit het getal 10 is.

Als we een getal kiezen dat eindigt op een 1, dan kunnen we geen getallen meer kiezen die eindigen op een 9. En andersom: als we een getal kiezen dat eindigt op een 9, dan kunnen

we geen getallen meer kiezen die eindigen op een 1. Kiezen we nou enkele getallen eindigend op een 9, dan kunnen we net zo goed deze getallen allemaal vervangen door de getallen in hetzelfde tiental eindigend op een 1, want dat scheelt per getal 8 snoepjes. We mogen er dus van uit gaan dat we (0 of meer) getallen eindigend op een 1 hebben gekozen en geen getallen eindigend op een 9.

Hetzelfde geldt voor getallen eindigend op een 2 en een 8: we mogen er van uit gaan dat we (0 of meer) getallen eindigend op een 2 hebben gekozen en geen getallen eindigend op een 8. Idem voor de eindcijfers 3 en 7, en voor de eindcijfers 4 en 6.

We mogen er dus van uit gaan dat de gekozen getallen eindigen op een 1, een 2, een 3 of een 4, of gelijk zijn aan 5 of 10:

$$1, 2, 3, 4, \quad 5, \quad 10, \quad 11, 12, 13, 14, \quad 21, 22, 23, 24, \quad 31, 32, 33, 34, \quad 41, 42, 43, 44$$

De 18 kleinste getallen in de rij komen overeen met het voorbeeld bovenaan en zijn bij elkaar opgeteld 295. Maar met een getal meer zitten we al op $295 + 41$ wat groter is dan 300. We hebben hierboven gezien dat bij 19 of meer leerlingen de docent een totaal aantal snoepjes nodig heeft dat minstens zo groot is als 19 getallen in deze rij, wat weer minstens zo groot is als de 19 kleinste getallen in deze rij, wat groter is dan 300. Bij 19 of meer leerlingen komt de docent dus snoepjes te kort. We concluderen dat de docent hooguit aan 18 leerlingen snoepjes kan uitdelen.

Inzenders met een juiste uitwerking

Harm Bakker, Huib Geboers, Hans Linders, Chantal Neijenhuis, Gerrit Zijlstra

Winnaar van de cadeaubon

Chantal Neijenhuis.